分類問題と安定性についての紹介

依田大樹

筑波大学数数理物質科学学研究科 D1

1. 構造定理とモデルの数
2. 構造理論の例 (強極小理論)
3. 安定性と構造理論
4. Future work

モデル理論と構造定理

1. モデル理論とは, 主に完全な理論 T とそれのモデル $M \models T$ の諸々について研究する分野である.

モデル理論と構造定理

1. モデル理論とは, 主に完全な理論 T とそれのモデル $M \models T$ の諸々について研究する分野である.
2. 分類理論は, 完全な一階述語の理論 T を構造理論 or 非構造理論という枠組みで分類しようとする Shelah のプログラムである.

モデル理論と構造定理

1. モデル理論とは, 主に完全な理論 T とそれのモデル $M \models T$ の諸々について研究する分野である.
2. 分類理論は, 完全な一階述語の理論 T を構造理論 or 非構造理論という枠組みで分類しようとする Shelah のプログラムである.
3. Hodges は What is a structure theory ?において, 分類理論は T の非可算濃度のモデルの同型の数を数えることで実現できる (かもしれない) ことを解説している.

構造定理について

ベクトル空間と次元

K-ベクトル空間 V, W について以下が成り立つ

$$V \simeq W \iff dim(V) = dim(W).$$

1. Shelah は, ベクトル空間における次元のように構造の同型を決定する不変量を持つような理論を構造理論 (*structure theory*) とよんだ.
2. 分類理論とは, 与えられた完全な理論 T が構造理論かどうか？という分類を考える理論である.

構造理論の例

例 1:代数閉体

$T = ACF_p$ を標数 p の代数閉体の理論とする．このとき $K \models ACF_p$ とその体拡大 $L \supseteq K$ は超越次数によって特徴づけられる．

例 2:可除群

$T = DAG$ を可除群の理論とする．このとき任意の $G \models T$ は次の形に分解できる:

$$G \simeq \mathbb{Q}^{(\alpha)} \oplus \bigoplus_p \mathbb{Z}_{p^\infty}^{(\alpha_p)}.$$

モデルの数

定義 (スペクトル関数)

κ を無限基数とする．濃度 κ の T のモデルの個数を $I(\kappa, T)$ で表す．

1. Hodges は "構造理論 $=$ 非可算モデルの数が少ない "であるのではないか？という方針を語っている．
2. つまり構造定理の問題をモデルの数を数えるということに帰着させようとしたのである．

構造理論のモデルの数 1

代数閉体の非可算モデル

$T = ACF_p$ においては, 非可算な代数閉体は濃度を決めれば一意になることが知られている. よって $I(\lambda, T) = 1$ である.

可除群の非可算モデル

$T = DAG$ において T の非可算モデル $G \models T$ は各 α_p と α の濃度によってのみ決まる. したがって $I(\lambda, T) = \lambda$ である.

構造定理のモデルの数 2

分類理論の方針

T の不変量を探すかわりに, 非可算濃度のモデルを数えることで完全な一階述語理論を分類する.

構造理論の定義

T は以下の条件を満たすとする:

$$I(\lambda, T) = 2^\lambda, \ \exists \lambda > \aleph_0.$$

このとき, T は**非構造理論** (*non-structure theory*) という.

Notation

1. 以下では可算で完全な理論 T と，それの十分に大きなモデル $\mathfrak{C} \models T$ を一つ固定する．元 a や集合 A といったらそれは $a \in \mathfrak{C}, A \subset \mathfrak{C}$ の事である．
2. $\models \varphi$ は $\mathfrak{C} \models \varphi$ の略記である．また $\varphi(\mathfrak{C}) = \{a \in \mathfrak{C} \mid \ \models \varphi(a)\}$ とおく．
3. b の A 上のタイプ $tp(b/A)$ を以下で定める:
$$tp(b/A) = \{\varphi(x, a) \mid \ \models \varphi(b, a), a \in A\}.$$
また $S(A) = \{tp(b/A) \mid b \in \mathfrak{C}\}$ とする．

1. 構造定理とモデルの数
2. 構造理論の例 (強極小理論)
3. 安定性と構造理論
4. Future work

強極小理論

定義 (強極小理論)

T が強極小であるとは, 任意の論理式 $\varphi(x)$ について, 以下が満たされるときである:

$$\varphi(\mathfrak{C}) \text{ か } \neg\varphi(\mathfrak{C}) \text{ のどちらかが有限集合.}$$

1. 強極小とは, 代数閉体が持つモデル理論的な性質を一般化した理論のクラスである.
2. 代数閉体における超越次数を参考にして, モデル理論的な "次元" の概念を定義できる.

ACF は強極小である

1. $T = ACF_0$ とする.

ACF は強極小である

1. $T = ACF_0$ とする.
2. T は QE を持つという事実を使う. 任意の $\varphi(x) \in \mathcal{L}(A)$ について, $f_i, g_j \in A[X]$ が存在して以下が成り立つ:
$$\varphi(x) \equiv \bigvee(\bigwedge_{i<n} f_i(x) = 0 \wedge \bigwedge_{j<m} g_j(x) \neq 0).$$

ACF は強極小である

1. $T = ACF_0$ とする.
2. T は QE を持つという事実を使う. 任意の $\varphi(x) \in \mathcal{L}(A)$ について, $f_i, g_j \in A[X]$ が存在して以下が成り立つ:
$$\varphi(x) \equiv \bigvee(\bigwedge_{i<n} f_i(x) = 0 \wedge \bigwedge_{j<m} g_j(x) \neq 0).$$
3. このとき $n = 0$ でなければ $\varphi(\mathfrak{C})$ は有限集合, $gn = 0$ であれば $\neg\varphi(\mathfrak{C})$ が有限集合である.

ACF は強極小である

1. $T = ACF_0$ とする.
2. T は QE を持つという事実を使う. 任意の $\varphi(x) \in \mathcal{L}(A)$ について, $f_i, g_j \in A[X]$ が存在して以下が成り立つ:
$$\varphi(x) \equiv \bigvee(\bigwedge_{i<n} f_i(x) = 0 \wedge \bigwedge_{j<m} g_j(x) \neq 0).$$
3. このとき $n = 0$ でなければ $\varphi(\mathfrak{C})$ は有限集合, $gn = 0$ であれば $\neg\varphi(\mathfrak{C})$ が有限集合である.
4. 例えば $\varphi(x) \equiv x^2 - 2 \wedge x - 1 \neq 0$ ならば $|\varphi(\mathfrak{C})| = 2$ であるし, $\varphi(x) \equiv x^3 = 5 \neq 0 \wedge x^5 - 1 \neq 0$ ならば $\neg\varphi(\mathfrak{C})$ が有限である.

ACF は強極小である

1. $T = ACF_0$ とする.
2. T は QE を持つという事実を使う. 任意の $\varphi(x) \in \mathcal{L}(A)$ について, $f_i, g_j \in A[X]$ が存在して以下が成り立つ:
$$\varphi(x) \equiv \bigvee(\bigwedge_{i<n} f_i(x) = 0 \wedge \bigwedge_{j<m} g_j(x) \neq 0).$$
3. このとき $n = 0$ でなければ $\varphi(\mathfrak{C})$ は有限集合, $gn = 0$ であれば $\neg\varphi(\mathfrak{C})$ が有限集合である.
4. 例えば $\varphi(x) \equiv x^2 - 2 \wedge x - 1 \neq 0$ ならば $|\varphi(\mathfrak{C})| = 2$ であるし, $\varphi(x) \equiv x^3 = 5 \neq 0 \wedge x^5 - 1 \neq 0$ ならば $\neg\varphi(\mathfrak{C})$ が有限である.
5. したがって ACF_0 は強極小理論の定義を満たす.

代数閉包

定義 (代数閉包)

1. $\varphi(\mathfrak{C})$ が有限集合となる $\varphi(x)$ は代数的な論理式であるという.
2. 集合 A の代数閉包 $acl(A)$ を以下で定義する:

$$acl(A) = \left\{ a \in \mathfrak{C} \;\middle|\; \exists \varphi(x) \in \mathcal{L}(A) : \text{代数的 s.t.} \models \varphi(a) \right\}$$

1. ACF における代数閉包の概念をモデル理論的に一般化する.
2. T としてベクトル空間の理論などを考えるとこれは線形包の概念とも一致する.

代数閉包と次元

定義 (独立性)

A が acl-独立であるとは, 任意の $a \in A$ について $a \notin acl(A \setminus \{a\})$ となることである.

1. ベクトル空間や代数閉体においての独立性を一般化する.
2. 強極小理論においてもこの独立性で基底を定義できる.

代数閉包と次元

定義

基底 $A, B \subset \mathfrak{C}$ とする．A が B の基底であるとは以下を満たすことである;

1. $acl(A) = B$,
2. A は acl-独立である．

命題

T は強極小, $M \models T$ とする．このとき任意の $A, B \subset M$ について以下が成り立つ:

$$A, B \text{ がともに } M \text{ の基底} \implies |A| = |B|.$$

強極小理論のモデルの数

命題

強極小な T について, 以下が成り立つ:

$$I(\lambda, T) = 1, \forall \lambda > \omega.$$

特に $M \models T$, $|M| = \lambda$ とすると $dim(M) = \lambda$ である.

1. 前スライドと $|acl(A)| \leq |A| + \omega$ であることを用いると, 強極小な T について↑のことが分かる.
2. Hodges の方針のとおりモデルの数は少ない.

分類理論と安定性

分類理論の方針 2

T に何らかの条件 (強極小より弱い) を仮定して, $I(\lambda, T)$ を調べる.

1. Shelah は T が構造理論かどうかについて, T に安定という条件を仮定して調べた.
2. 安定な理論においては抽象的な独立関係を定義することができる.

安定性

定義 (安定性)

1. すべての $A \subset \mathfrak{C}$ について, $|A| \leq \lambda \implies |S(A)| \leq \lambda$ を満たすとき, T は λ-安定という.
2. ある λ で T が λ-安定なことは単に T は安定であるという.
3. ある κ があって, 任意の $\lambda \geq \kappa$ について T が λ 安定なときは T は超安定であるという.

安定な理論の例

代数閉体

$T = ACF$ とすると T は ω-安定である．一般に強極小な T は ω-安定になる．

R-加群

T を R-加群の理論とするとこれは安定である．

ランダムグラフ

T をランダムグラフの理論とする．このとき T は安定ではない．

安定性とモデルの数

命題 (Shelah)

T は安定 (超安定) でない理論とする．このとき T は構造理論ではない．

1. Shelah は始めに安定でない理論は構造定理でない事を証明した (後に超安定でない理論まで拡張した).
2. T が超安定という仮定の下で T が構造定理かどうかを調べる.

分岐概念と独立関係

定義 (独立関係)

1. 論理式 $\varphi(x, b)$ が A 上分岐するとは, $\varphi(x, b)$ の解を持たない $M \supset A$ が存在することである.
2. a が A 上 b と独立である ($a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\;|}_A b$ と書く) とは, 任意の $\varphi(x, b) \in tp(a/Ab)$ が A 上分岐しないことである.

1. 必ずとも強極小とは限らない T についても独立概念を定義できる.
2. 独立関係を用いて超安定な T に条件を加える事で, モデルの数を数える事ができる.

独立関係の例

Infinite equivalence relation

$\mathcal{L} = \{E(*,*)\}$ とする．$\mathcal{L}$-理論 T は "E は無限濃度の同値類を無限個持つ同値関係" を表す理論とする．このとき $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}\, b \iff \models \neg E(a,b)$ である．

加群の理論

T を完全な R-加群の理論とする．また T のモデルは直積について閉じているとする．$M \models T$ として A は M の直和因子とする．このとき $B, C \subseteq M$ について以下が成り立つ:

$$B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_A C \iff \exists N_1, N_2 \models T \text{ s.t. } B \subset N_1 \oplus A \text{ かつ } C \subset A \oplus N_2.$$

色々な理論のモデルの数

超安定な T のモデルの数

T は超安定であるとする．このとき以下が成り立つ;

1. T は非有界であるとすると $I(\aleph_\alpha, T) \geq |\alpha + \omega|^{\alpha+1}$.
2. T が DOP を持つ理論とすると $I(\lambda, T) = 2^\lambda$, $\lambda > \aleph_0$.
3. etc...

1. 例えば T が非有界であるとは，任意の b, A について，$a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\emptyset} A'$, $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A} A'$, $A' \supseteq A$ ならば $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A'} b$ となることである．

1. 構造定理とモデルの数
2. 構造理論の例 (強極小理論)
3. 安定性と構造理論
4. Future work

Future work

1. 安定性には NIP などのより弱い一般化がある．非安定な理論では一般に独立性はいい振る舞いをしないことがある．
2. NIP では安定な理論同様に独立性を考えることができる generically stable type の性質が調べられている．これに対する飽和性等を調べることによりモデルの構造解析ができないか?と考えている．
3. また AEC 等の初等的でないモデルのクラスについての独立性の議論の一般化の研究もあるので，そちらも取り組んで行きたい．

1. $T = ACF_0$ において, 例えば $a = \pi, A = \mathbb{Q}$ として $b \notin acl(\mathbb{Q})$ との独立性を考える.
2. $\varphi(x) \in tp(\pi/\mathbb{Q}b)$ を取るとこれは本質的に $\varphi_0(x) \equiv a_n x^n + \cdots + a_0 = 0$ か $\varphi_1(x) \equiv a_n x^n + \cdots + a_0 \neq 0$ の形をしていると思える, ただし $a_i \in \mathbb{Q}[b]$ である.
3. このとき $\varphi_0(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上分岐する論理式である. 実際 b と $\mathbb{Q}$ 上代数的に独立な元 c をもってきて $\mathbb{Q}(c)$ の代数閉包 M をとるとこれは $\varphi_0(x)$ の解をもたない.
4. したがって $\pi \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\!|}_{\mathbb{Q}} b$ ならば $tp(\pi/\mathbb{Q}b)$ は $\varphi_1(x)$ の形の論理式しか元に持たないが, これは π が $\mathbb{Q} \cup b$ をパラメータに持つ多項式で表せないことを意味する.