Compactness cardinals and covering properties of topological spaces

薄葉 季路

早稲田大学基幹理工学部

手形 L^4 研究集会
秋田大学
2018 年 3 月 28 日

述語論理の基礎

言語, 論理式

$x, y, z, \dots$ 等を変数を表す記号 (変数記号) とする.

Definition

関数記号 $f, g, +, \times \dots$, 関係記号 $R, \leq, =, \dots$, 定数記号 $\mathrm{c}, 0, 1, \dots$ の集まりを言語と呼び $\mathcal{L}$ で表す.

$\mathcal{L}$ の要素, および $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\forall$, $\exists$ と変数記号 (と (,) などの補助記号) の有限列で適当な条件を満たすものを $\mathcal{L}$-論理式, 論理式と呼ぶ. 論理式の集まりを ($\mathcal{L}$-) 理論, 公理系と呼ぶ.

論理式の例

- $\forall x \forall y (x \leq y \vee y \leq x)$
- $\forall x (\neg(x = 0) \rightarrow \exists y (x = y + 1))$

言語, 理論の例

- 群の言語 $\mathcal{L} = \{=, +, 0\}$
- 群の公理系
  - $\forall x \forall y \forall z (x + (y + z) = (x + y) + z)$
  - $\forall x (x + 0 = x \wedge 0 + x = x)$
  - $\forall x \exists y (x + y = 0 \wedge y + x = 0)$
- (線形) 順序の言語: $\mathcal{L} = \{=, \leq\}$
- 線形順序の公理系
  - $\forall x \forall y \forall z (x \leq y \wedge y \leq z \to x \leq z)$
  - $\forall x (x \leq x)$
  - $\forall x \forall y (x \leq y \wedge y \leq x \to x = y)$
  - $\forall x \forall y (x \leq y \vee y \leq x \vee x = y)$
- 体の言語 $\mathcal{L} = \{=, +, \times, 0, 1\}$ 代数閉体の公理系...
- 算術の言語 $\mathcal{L} = \{=, \leq, +, \times, 0, 1\}$ 算術の公理系...
- 集合論の言語 $\mathcal{L} = \{=, \in\}$, etc...

モデル

Definition

数学的構造 $\mathcal{M} = (M; \cdots)$ で論理式 φ が**真**
$\iff$ $\mathcal{M}$ において φ が成り立っている.
$\mathcal{M}$ が理論 T の**モデル**である
$\iff$ T の各論理式が $\mathcal{M}$ で**真**である.

例

T: 群の公理系

- $(\mathbb{Z}, +, 0)$, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times, 1)$ などは T のモデルである.
- $(\mathbb{N}, +, 0)$, $(\mathbb{R}, \times, 1)$ などは T のモデルではない.

様々な数学的構造のクラスが適当な理論で特徴づけ可能である:

- T が群の公理系ならば,

  $\mathcal{M}$ が (実際に) 群 $\iff$ $\mathcal{M}$ は T のモデルである.
- T が線形順序の公理系ならば,

  $\mathcal{M}$ が (実際に) 線形順序を成す $\iff$ $\mathcal{M}$ は T のモデルである.
- 任意の自然数 n に対して, 理論 T_n で次のようなものがある:

  $\mathcal{M}$ はちょうど n 個の要素を持つ $\iff$ $\mathcal{M}$ が T_n のモデルである.
- 適当な理論 T で

  $\mathcal{M}$ が標数 0 の体 $\iff$ $\mathcal{M}$ は T のモデルである.

それでもこの理論による特徴づけは万能ではない.

特徴づけ不可能性

次を満たすような理論 T は存在しない:

- $\mathcal{M}$ が T のモデル $\iff$ $\mathcal{M}$ はちょうど可算無限個の要素を持つ
- $\mathcal{M}$ が T のモデル $\iff$ $\mathcal{M}$ は順序集合として $\mathbb{N}$ と同型
- $\mathcal{M}$ が T のモデル $\iff$ $\mathcal{M}$ は整列順序
- $\mathcal{M}$ が T のモデル $\iff$ $\mathcal{M}$ は体として $\mathbb{R}$ と同型, etc.

"整列順序である", "$\mathbb{N}$ である", "$\mathbb{R}$ である" は通常の述語論理では表現しきれない.

- できれば, 何らかの形で表現したい
- 述語論理を強化して表現力を強くすればよい!

$\Rightarrow$ 高階述語論理, 無限論理

無限論理

無限論理

- $\mathcal{M}$ が $\mathbb{N}$ と同型となるためには, 次のような論理式を考えればよい: $\forall x(x = 0 \lor x = 1 \lor x = 2 \lor \cdots)$
- これは記号の無限列なので, 通常の意味での論理式ではない.
- それでも, こういったものも認めてしまってもいいんじゃないか?

Definition (Tarski (1950 年代?))

λ, μ: 無限基数. 無限論理 $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}$ の論理式を次のように定める:

- $\mathcal{L}$ の通常の論理式は $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}$ の論理式.
- φ が $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}$ の論理式ならば $\neg\varphi$ も $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}$ の論理式.
- $\{\varphi_i \mid i \in I\}$ が $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}$ の論理式の濃度 $< \lambda$ の集まりならば $\bigwedge_{i\in I} \varphi_i$, $\bigvee_{i\in I} \varphi_i$ も $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}$ の論理式.
- φ が $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}$ の論理式で $\{x_j \mid j \in J\}$ が φ に現れる濃度 $< \mu$ 個の自由変数の集まりならば $(\forall x_j)_{j\in J}\varphi$, $(\exists x_j)_{j\in J}\varphi$ も $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}$ の論理式.

Remark

φ が通常の意味での論理式 $\iff$ φ は $\mathcal{L}_{\omega,\omega}$-論理式
(ここで, ω は最小の無限基数 $\aleph_0$ で $\mathbb{N}$ と同一視)

Definition

数学的構造 $\mathcal{M}$ で $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}$ 論理式 φ が真であることを次のように定める:

- $\varphi = \bigwedge_{i \in I} \varphi_i$ の時, φ が $\mathcal{M}$ で真 $\iff$ すべての $i \in I$ に対して φ_i が $\mathcal{M}$ で真
- $\varphi = (\forall x_j)_{j \in J} \psi$ の時, φ が $\mathcal{M}$ で真 $\iff$ 任意の $a_j \in \mathcal{M}$ $(j \in J)$ に対して $\psi(a_j \dots)$ が $\mathcal{M}$ で真.
- 他は予想されるように定義.

特徴づけ可能性

ω_1: 最小の非可算基数, ω の次の無限基数

T を線形順序の公理系に次の $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-論理式を加えた理論とする:

- $n \leq m$ (各 $n, m \in \mathbb{N}$ で $n \leq m$)
- $\forall x \left(\bigvee_{n<\omega}(x = n)\right)$.

この時, $\mathcal{M}$ が T のモデル $\iff$ $\mathcal{M}$ は $\mathbb{N}$ と順序同型

T を線形順序の公理系に次の $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega_1}$-論理式を加えた理論とする:

- $\neg(\exists x_n)_{n<\omega}\left(\bigwedge_{n<\omega}(x_{n+1} < x_n)\right)$

この時, $\mathcal{M}$ が T のモデル $\iff$ $\mathcal{M}$ は整列順序

その他, 適当な $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}$ の理論によって $\mathbb{R}$ などの様々な構造, クラスが特徴づけ可能.

以下は一階述語論理では特徴づけ不可能だが, 適当な $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-理論で特徴づけ可能:

1. torsion abelian groups;
2. finitely generated groups;
3. non-finitely generated groups;
4. linear orders isomorphic to $(\mathbb{Z}; <)$;
5. archimedian field;
6. connected graphs;
7. recursively saturated models of PA;
8. ω-models of ZFC (i.e., models of ZFC where the integers are standard);
9. models of T omitting p, where T is a first order theory and p is a type.

それでもやはり普通の論理

通常の述語論理

通常の述語論理は非常に良い性質を持っている:

- 論理式が実際に書ける.
- 理論の展開に集合論などを必要としない.
- (強) 完全性定理が成り立つ.
- コンパクト性定理が成り立つ.
- Löwenheim-Skolem の定理が成り立つ.
- 表現力が弱いことにより逆に色々なことができる, etc.

無限論理

- 上はすべて成り立たない.

コンパクト性定理, Löwenheim-Skolem の定理

コンパクト性定理

Theorem (コンパクト性定理)

T: $\mathcal{L}$-理論

もし T の任意の有限部分がモデルを持つならば T 自身もモデルを持つ.

応用例

$\mathcal{L}$: 体の言語 (+好きなだけ)

T': $\mathbb{R}$ で真な $\mathcal{L}$-論理式全体.

c: 新しい定数記号

$T = T' \cup \{n < c \mid n \in \mathbb{N}\}$

このとき T' の任意の有限部分はモデルを持つので, コンパクト性より T' はモデル $\mathbb{R}^*$ を持つ.

- $\mathbb{R}^*$ は $\mathbb{R}$ の拡大体とみなせる.
- 任意の $\mathcal{L}$-論理式 φ について

  φ が $\mathbb{R}$ で真 $\iff$ φ は $\mathbb{R}^*$ で真
- $n < c$ $(n \in \mathbb{N})$ より, $\mathbb{R}^*$ において c は無限大の数, $1/c$ は無限小の数となる.
- この無限大, 無限小を用いて微積分を展開することが可能 (超準解析)
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が点 x で連続 $\iff$ f を $\mathbb{R}^*$ に自然に拡張した $f^* : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ において, 任意の $y \in \mathbb{R}^*$ に対して

  $|x - y|$ が無限小 $\Rightarrow |f^*(x) - f^*(y)|$ は無限小.

コンパクトではない

一般に無限論理においてはコンパクト性定理は成り立たない.

$c_0, c_1, \ldots$: 定数記号
$T = \{\neg(c_i = c_j) : i < j\} \cup \{\bigvee_{n<\omega}\left(\forall x \left(\bigvee_{i \le n}(x = c_i)\right)\right)\}$.
$\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-理論 T の任意の有限部分はモデルを持つが T 自身はモデルを持たない.

“任意有限” を “任意の可算無限” に変えても成り立たない:

$c_0, c_1, \ldots, c_\alpha, \ldots$ $(\alpha < \omega_1)$: 定数記号
f: 関数記号
$T = \{\neg(c_i = c_j) \mid i < j < \omega_1\} \cup \{\forall x \forall y (f(x) = f(y) \to x = y)\}$
$\cup \{(\exists x_i)_{i<\omega}\left(\forall x (\bigvee_{i<\omega}(f(x) = x_i))\right)\}$
$\mathcal{L}_{\omega_1,\omega_1}$-理論 T の任意の可算無限部分はモデルを持つが T はモデルを持たない.

Löwenheim-Skolem の定理

Theorem (上方 Löwenheim-Skolem の定理)

$\mathcal{L}$-理論 T に対し, もし T が無限モデル $\mathcal{M}$ を持つならば T は $\mathcal{M}$ の濃度より任意に大きい無限モデルを持つ.

Remark

上方 Löwenheim-Skolem の定理を使うと, $\mathbb{R}$ と "全く同じ" 性質を持つ濃度がいくらでも大きなモデルが作れる. これを使っても, 先ほどの超準解析を行うための $\mathbb{R}^*$ は得られる.

Löwenheim-Skolem の定理もダメ

上方 Löwenheim-Skolem の定理も無限論理に対してはそのままでは成り立たない.

$\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-論理式 φ で

$$\mathcal{M} \text{ が } \varphi \text{ のモデル} \iff \mathcal{M} \text{ は可算無限モデル.}$$

となるものがある. よって φ は非可算無限モデルを持たない.

しかしながら次が知られている:

Fact (Morley)

次を満たす非可算無限基数 κ が存在する:
任意の $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-論理式 φ に対して, もし φ が濃度 κ 以上のモデルをもつならば φ は任意に大きい無限モデルを持つ.

- 無限理論においてはコンパクト性定理は成り立たない.
- ($\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-理論に制限を付けて得られるコンパクト性定理の類似物はいくつか知られている (e.g. Barwise のコンパクト性定理))
- 一方, 上方 Löwenheim-Skolem の定理は "可算無限" を "(とある大きな) 基数以上" にすれば類似物が成り立つ.
- 同様にコンパクト性定理も "任意の有限部分" を "もっと濃度が大きな部分理論" とすればコンパクト性定理の類似物が得られるのじゃないか?

Definition

無限基数 κ が $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}$-コンパクト
$\iff$ 任意の $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}$-理論 T に対して, T の任意の濃度 $< \kappa$ の部分理論がモデルを持つならば T もモデルを持つ.

コンパクト性定理より, ω は $\mathcal{L}_{\omega,\omega}$-コンパクト基数.

コンパクト基数

巨大基数

Fact

$\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-コンパクト基数が存在するならば, それは巨大基数になる.

- 巨大基数: ω が持つ性質を一般化することで得られる基数.

無限基数 ω は次の性質を持つ:

- 有限集合の有限族の和集合は有限集合 (正則性)
- $n < \omega$ に対して $2^n < \omega$ (強極限性)

Definition (到達不能基数 (Hausdorff(1908), Sierpinski-Tarski, Zermelo(1930))

非可算基数 κ が到達不能基数 $\iff$

- 濃度 $< \kappa$ の集合からなる濃度 $< \kappa$ の集合族の和集合は濃度 $< \kappa$.
- 任意の基数 $\lambda < \kappa$ に対して $2^\lambda < \kappa$.

強コンパクト基数

Fact

- 到達不能基数が存在する $\iff$ グロタンディク宇宙が存在する.
- 到達不能基数の存在は標準的な集合論公理系 ZFC から証明できない.

“無限基数 ω は $\mathcal{L}_{\omega,\omega}$-コンパクト” の類似が大きな基数でも成り立つに違いない:

Definition (Tarski (1962))

非可算基数 κ が強コンパクト基数 $\iff$ κ は $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$-コンパクト基数.

Fact

強コンパクト基数は到達不能基数, かつ κ より小さい到達不能基数が κ 個存在する.

$\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-コンパクト基数

$\mathcal{L}_{\omega,\omega}$ より一段階強い $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-コンパクト基数ですら, かなり大きな巨大基数になることが知られている:

Fact

1. 強コンパクト基数は $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-コンパクト基数である.
2. κ が $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-コンパクト基数ならば, κ は $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega_1}$-コンパクト, $\mathcal{L}_{2^\omega,2^\omega}$-コンパクト, $\mathcal{L}_{2^{2^\omega},2^{2^\omega}}$-コンパクト,... .
3. κ が $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-コンパクト基数ならば, κ より小さい到達不能基数がたくさん存在する. 実際, κ 以下に可測基数が存在する.
4. 特に $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-コンパクト基数の存在は ZFC から証明できない.

強コンパクト基数 v.s. $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-コンパクト基数

κ が $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}$-コンパクト基数ならば, κ より大きい基数は全て $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}$-コンパクト基数. よって最小の $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}$-コンパクト基数が問題になる.

強コンパクト基数は $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-コンパクト基数だが, その間のギャップは非常に危うい:

Fact (Bagaria-Magidor (2014))

1. 次は無矛盾: 最小の $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-コンパクト基数は強コンパクト.
2. 次も無矛盾: 最小の $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-コンパクト基数は到達不能基数ではなく, 特に強コンパクトではない.

位相空間と被覆の性質

コンパクト性定理は, 位相空間の被覆の性質と密接な関係があることが知られている:

Fact

ZF の下で次は同値:

1. 命題論理のコンパクト性定理.
2. 述語論理のコンパクト性定理.
3. (Tychonoff の定理) 任意のコンパクトハウスドルフ空間の族 $\{X_i \mid i \in I\}$ に対して, その積空間 $\prod_{i \in I} X_i$ もコンパクト.

Remark

- ZF からは上の (1)-(3) のどれも証明できない.
- ZF の下で, 選択公理 $\iff$ 任意のコンパクト空間の族 $\{X_i \mid i \in I\}$ に対して, その積空間 $\prod_{i \in I} X_i$ もコンパクト.
- ZF+(1)–(3) からは選択公理は証明できない.

リンデレフ空間

- コンパクト空間とコンパクト性定理には関係がある.
- では, $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-論理と適当な位相空間の被覆の性質にも関係があるのでは?

Definition

位相空間 X のリンデレフ度数 $L(X)$ を次を満たす最小の無限基数とする: 任意の X の開被覆は濃度 $\leq \kappa$ の部分被覆を持つ.

X がリンデレフ $\iff L(X) = \omega$

$\iff X$ の任意の開被覆は高々可算な部分被覆を持つ.

Remark

- 正則リンデレフ空間は正規パラコンパクト.
- リンデレフ距離空間は第二可算.
- リンデレフ空間の非可算無限部分集合は集積点を持つ.

積空間のリンデレフ度数

- コンパクト空間 $\iff$ 任意の開被覆は濃度 $< \omega$ の部分被覆を持つ.
- リンデレフ空間 $\iff$ 任意の開被覆は濃度 $< \omega_1$ の部分被覆を持つ.

Tychonoff の定理のリンデレフ空間版は成り立たない:

Fact

S: ゾルゲンフライ線.

S は正則リンデレフ空間だが $L(S^2) = 2^\omega$.

Classical Question

リンデレフ空間の積空間のリンデレフ度数はどれくらい大きくなりえるか?

$\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-コンパクトとリンデレフ空間の積

Theorem (Bagaria-Magidor (2014))

無限基数 κ に対して次は同値:

1. κ は $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-コンパクト基数.
2. 任意のリンデレフ空間の族 $\{X_i \mid i \in I\}$ に対して, 積空間 $\prod_{i\in I} X_i$ のリンデレフ度数は $\leq \kappa$.

よって, κ が最小の $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-コンパクト基数 $\iff$ κ は任意のリンデレフ空間の族 $\{X_i \mid i \in I\}$ に対して $L(\prod_{i\in I} X_i) \leq \kappa$ となる最小の基数.

証明: (1) $\Rightarrow$ (2): Tychonoff の定理のウルトラフィルターを使った証明を素直に書き直す.

(2) $\Rightarrow$ (1): 可算離散空間 $\mathbb{N}$ の無限積のリンデレフ度数がとても大きくなることを示す

二個の積

Classical Question

2 個のリンデレフ空間の積のリンデレフ度数はどれくらい大きくなるか?

- 2 個のリンデレフ空間の積でそのリンデレフ度数が 2^ω より真に大きくなるものが存在するかどうかわかっていない (存在することが無矛盾であることは知られている)

Theorem (Usuba (2017))

次は無矛盾:

κ が最小の $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-コンパクト基数

$\iff$ κ は任意の正則リンデレフ空間 X, Y に対して $L(X \times Y) \leq \kappa$ となる最小の基数.

証明: Forcing.

P-space, G_δ-topology

Definition

位相空間 X が P-space $\iff$ X の任意の G_δ 集合 (可算個の開集合の共通部分) が開集合

位相空間 X に対して，その G_δ 集合全体を開基として位相を入れた空間を X_δ とすると，X_δ は X より細かい P-space になる．(G_δ-topology)

例

- $I = [0, 1]$ の時，I_δ は濃度 2^ω の離散空間，よって $L([0, 1]_\delta) = 2^\omega$.
- 離散空間 D に対して αD を一点コンパクト化とすると，αD_δ はリンデレフ空間，よって $L(\alpha D_\delta) = \omega$.

G_δ-topology のリンデレフ度数

Question (Arhangelskii (1970 年代))

コンパクトハウスドルフ空間 X に対して, X_δ のリンデレフ度数はどれくらい大きくなるか?

Theorem (Usuba (2017))

1. κ が $L_{\omega_1,\omega}$-コンパクトならば, 任意のコンパクト空間 X に対して $L(X_\delta) \leq \kappa$.
2. κ が $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-コンパクトでないとする. D を濃度 κ の離散空間として, βD をその Stone-Čech コンパクト化とすると, $L(\beta D_\delta) \geq \kappa$.

よって, κ が最小の $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-コンパクト基数

$\iff$ κ は任意のコンパクトハウスドルフ空間の X に対して $L(X_\delta) \leq \kappa$ となる最小の基数.

(注: ultrapower を使うともっと簡単にできます)

(1):

ポイント: "G_δ-集合である" が $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-論理式で書ける. X をコンパクト空間, $\mathcal{T}$ を位相, $\mathcal{U}$ を G_δ 集合からなる開被覆として構造 $\mathcal{M} = (X \cup \mathcal{T} \cup \mathcal{U}; X, \mathcal{T}, \mathcal{U}; x (x \in X), O (O \in \mathcal{T}), Z (Z \in \mathcal{U}))$ を考える.

- "$\mathcal{T}$ は開基" は適当な $\mathcal{L}$-論理式で表せる.
- "$\mathcal{U}$ の要素 Z は $\bigcap_{n<\omega} On$" は $\forall x (x \in X \to (x \in Z \leftrightarrow \bigwedge_{n<\omega} (x \in O_n)))$ として $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-論理式で表せる.
- T を $\mathcal{M}$ で真な $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-論理式全体とする.
- もし $\mathcal{U}$ の任意の濃度 $< \kappa$ の部分族が開被覆でないならば, 新しい定数記号 c を用意して $T' = T \cup \{c \in X\} \cup \{c \notin Z \mid Z \in \mathcal{U}\}$ とすると, T' の濃度 $< \kappa$ の部分理論は $\mathcal{M}$ をモデルとして持つ.

- よって T' はモデル $\mathcal{N} = (X' \cup \mathcal{T}' \cup \mathcal{U}', \dots)$ を持つ. $\mathcal{M} \prec_{\omega_1\omega} \mathcal{N}$ となっている.
- このとき $\mathcal{T}'$ は X' の開基になる.
- 各 $x \in X$ に対して, $Z \in \mathcal{U}$ で $x \in Z$ となるものを取る.
- このとき $Z' \in \mathcal{U}'$ で $Z' \cap X = Z$ となるものが取れる.
- $Z = \bigcap_{n<\omega} O_n$ $(O_n \in \mathcal{T})$ なら $Z' = \bigcap_{n<\omega} O'_n$ $(O'_n \in \mathcal{T}'$, $O_n = X \cap O'_n)$ となる.
- $c \notin Z'$ なので, $O_Z \in \mathcal{T}$, $Z \subseteq O_Z$ で $c \notin O'_Z$ となるものが取れる.
- このとき $\{O_Z \mid Z \in \mathcal{U}\}$ は X の開被覆になる.
- X はコンパクトなので有限個の $O_{Z_0}, \dots, O_{Z_n}$ で X が覆える.
- しかしこのとき $\{Z'_0, \dots, Z'_n\}$ も X' の開被覆なり, $c \notin Z_i$ に矛盾する.

アーベル群と無限直積

Specker 現象

$\mathbb{Z}$ を加法に関するアーベル群とみなす.

$n < \omega$ に対して, $e_n : \omega \to \{0,1\}$ を $e_n(k) = 1$ if $k = n$, $e_n(k) = 0$ if $k \neq n$ とする. $e_n \in \mathbb{Z}^\omega$($\mathbb{Z}$ の可算個の直積群) に注意.

Fact (Specker)

h を $\mathbb{Z}$ の可算個の直積群 $\mathbb{Z}^\omega$ から $\mathbb{Z}$ への準同型写像とすると, 有限個の n を除いて $h(e_n) = 0$ となる.

$\mathbb{Z}^{<\omega}$ を $f : \omega \to \mathbb{Z}$ で有限個の $n < \omega$ を除いて $f(n) = 0$ となる f 全体とする. $(= \bigoplus_{n<\omega}\mathbb{Z})$. $\mathbb{Z}^{<\omega}$ は $\mathbb{Z}^\omega$ の部分群.

Corollary

$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^\omega, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}^{<\omega}$. よって $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^\omega/\mathbb{Z}^{<\omega}, \mathbb{Z}) = \{0\}$.

一般化

無限基数 κ に対して, $\mathbb{Z}^{<\omega} \subseteq \mathbb{Z}^{\kappa}$ を $f : \kappa \to \mathbb{Z}$ で有限個の $\alpha < \kappa$ を除いて $f(\alpha) = 0$ となる f 全体とする.

Fact (Łos,Eda)

無限基数 κ に対して, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^{\kappa}/\mathbb{Z}^{<\omega}, \mathbb{Z}) \neq \{0\} \iff \kappa$ 以下の可測基数が存在する.

κ が可測基数 $\iff$ ブール代数 $\mathcal{P}(\kappa)$ 上に κ-完備ウルトラフィルターが存在する.

- 強コンパクト $\Rightarrow$ 可測基数
- κ が可測基数なら κ は到達不能基数, かつ κ より小さい到達不能基数が κ 個存在する.

無限基数 κ に対して, $\mathbb{Z}^{<\kappa} \subseteq \mathbb{Z}^\kappa$ を $f : \kappa \to \mathbb{Z}$ で κ 未満個の $\alpha < \kappa$ を除いて $f(\alpha) = 0$ となる f 全体とする.

Fact

κ が可測基数ならば $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^\kappa/\mathbb{Z}^{<\kappa}, \mathbb{Z}) \neq \{0\}$.

Question

逆はどうか?(正しくないが, 何らかの意味で逆は成り立つか?)

Theorem (Usuba (2017))

1. κ が $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-コンパクト基数ならば, 任意の $\lambda \geq \kappa$ に対して $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^\lambda/\mathbb{Z}^{<\lambda}, \mathbb{Z}) \neq \{0\}$.
2. κ が $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-コンパクト基数でないならば, ある $\lambda \geq \kappa$ に対して $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^\lambda/\mathbb{Z}^{<\lambda}, \mathbb{Z}) = \{0\}$.

よって, κ が最小の $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-コンパクト基数

$\iff$ κ は任意の $\lambda \geq \kappa$ に対して $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^\lambda/\mathbb{Z}^{<\lambda}, \mathbb{Z}) \neq \{0\}$ となる最小の基数.

まとめ

- 無限論理: 無限個の $\wedge, \vee$ や $\forall, \exists$ も使ってよい論理.
  - 表現力がすごい.
  - 色々なものが自然に書ける.
- 失ったものを色々ある.
- コンパクト基数: 失ったものを取り戻す
- $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-コンパクト基数と位相空間論の被覆の関係

- $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-論理で書ける構造はたくさんあるので, もっと色々な特徴づけができそう.

参考文献

- J. Bagaria, M. Magidor, *Group radicals and strongly compact cardinals*. Trans. Am. Math. Soc. Vol. 366, No. 4 (2014), 1857–1877
- J. Bagaria, M. Magidor, *On ω_1-strongly compact cardinals*. J. Symb. Logic　Vol. 79, No. 1 (2014), 268–278.
- D. Marker, *Lectures on infinitary model theory*.
- T. Usuba, *G_δ-topology and compact cardinals*. https://arxiv.org/abs/1709.07991