The ultimate analysis of some hierarchies under AD^+

木原貴行 [1]

名古屋大学 大学院情報学研究科

手形 *L*4 研究集会, 秋田大学

March 28, 2018

[1] partially supported by JSPS KAKENHI Grant 17H06738, 15H03634, and the JSPS Core-to-Core Program (A. Advanced Research Networks)

- 名前: 木原 貴行
- 略歴:
  - 東北大学 理学部 数学科卒
  - 東北大学 大学院理学研究科 数学専攻 修了
  - JAIST 情報科学研究科 PD
  - カリフォルニア大学バークレー校 数学科 PD
  - 名古屋大学 情報学研究科　専任講師　（現職）
- 専門分野（これまで論文を書いてきた分野）
  - 計算可能性理論，計算可能解析学，アルゴリズム情報理論，記述集合論，逆数学など

算術的階層 (Kleene 1943)

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \Sigma^0_1 & & & & \Sigma^0_2 & & & & \Sigma^0_3 & & \\
 & / & & \backslash & & / & & \backslash & & / & & \backslash & \\
\Delta^0_1 & & & & \Delta^0_2 & & & & \Delta^0_3 & & & & \cdots \\
 & \backslash & & / & & \backslash & & / & & \backslash & & / & \\
 & & \Pi^0_1 & & & & \Pi^0_2 & & & & \Pi^0_3 & &
\end{array}
$$

- **算術的集合: 一階算術の言語で定義可能な $\mathbb{N}$ の部分集合**
- **Σ^0_n: $\exists$ から始まる高々 n 個の量化記号を用いて定義可能**

$$\exists x_1 \forall x_2 \dots Q x_n \varphi(i, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- **Π^0_n: $\forall$ から始まる高々 n 個の量化記号を用いて定義可能**

$$\forall x_1 \exists x_2 \dots Q x_n \varphi(i, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- $\Delta^0_n = [\Sigma^0_n$ **かつ** $\Pi^0_n]$.
- $\Delta^0_1 =$ **計算可能**; $\Sigma^0_1 =$ RE; $\Pi^0_1 =$ co-RE.
- $\Delta^0_2 =$ **極限計算可能 = 停止問題を神託に用いて計算可能.**

超算術的階層 (Davis. Mostowski; Kleene 1955)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \Sigma^0_1 \arrow[dr, dash] & & \Sigma^0_2 \arrow[dr, dash] & & & \Sigma^0_\omega \arrow[dr, dash] & & \Sigma^0_{\omega+1} \arrow[dr, dash] & \\
\Delta^0_1 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \Delta^0_2 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \cdots & \Delta^0_\omega \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \Delta^0_{\omega+1} \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \cdots \\
 & \Pi^0_1 \arrow[ur, dash] & & \Pi^0_2 \arrow[ur, dash] & & & \Pi^0_\omega \arrow[ur, dash] & & \Pi^0_{\omega+1} \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

- **超算術的階層**: **算術的階層の無限論理 $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ への拡張.**
- $\boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha$: $\bigvee_{n\in\omega}\varphi_n$ **と定義可能．ここで φ は $\Sigma^0_{<_O\alpha}$-論理式の計算可能列．**
- Π^0_α **と** Δ^0_α **も同様．**
- **一階算術の真理値集合** $\mathrm{Th}(\mathbb{N}) = \{\ulcorner\varphi\urcorner : \mathbb{N} \models \varphi\}$ **は** Δ^0_ω.

解析的階層 (Davis, Mostowski; Kleene 1955)

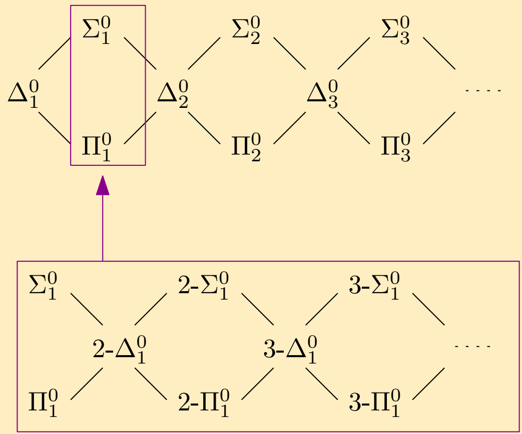
$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \Sigma^0_\alpha \arrow[dr, dash] & & & \Sigma^1_1 \arrow[dr, dash] & & \Sigma^1_2 \arrow[dr, dash] & & \Sigma^1_3 \arrow[dr, dash] & \\
 & \Delta^0_\alpha \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \cdots\cdots & \Delta^1_1 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \Delta^1_2 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \Delta^1_3 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \cdots\cdots \\
 & & \Pi^0_\alpha \arrow[ur, dash] & & & \Pi^1_1 \arrow[ur, dash] & & \Pi^1_2 \arrow[ur, dash] & & \Pi^1_3 \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

- 解析的集合: 二階算術（解析）の言語で定義可能な $\mathbb{N}$ の部分集合
- Σ^1_n: $\exists$ から始まる高々 n 個の集合量化記号を用いて定義可能
  （数量化記号はいくらでも用いてよい）

$$\exists X_1 \forall X_2 \dots Q X_n \forall y_1 \exists y_2 \dots Q y_k \varphi(i, \overline{X}, \overline{y})$$

- Π^1_n と Δ^1_n も同様．
- Δ^1_1 = 超算術的 $= \bigcup_{\alpha < \omega_1^{\mathrm{CK}}} \Sigma^0_\alpha$.

試行錯誤の階層 (Putnam 1965)



- Δ^0_2 = **極限計算可能**; ($k \in A$? Answer: n,n,y,y,y,n,y,y,y,y,...$\rightarrow$ limit)
- n-Σ^0_1: **初期値** FALSE **かつ高々** n **回の変心で極限計算可能**
- E. M. Gold (1967): **言語の学習モデル（極限同定の理論）**

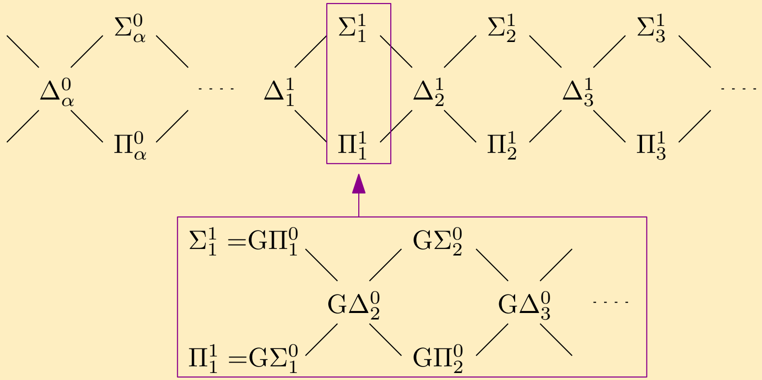
試行錯誤の超限階層 (Ershov 1968)

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \Sigma^0_1 \arrow[dr, dash] & & \Sigma^0_2 \arrow[dr, dash] & & \Sigma^0_3 \arrow[dr, dash] & \\
\Delta^0_1 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \Delta^0_2 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \Delta^0_3 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \cdots\cdots \\
 & \Pi^0_1 \arrow[ur, dash] & & \Pi^0_2 \arrow[ur, dash] & & \Pi^0_3 \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\Sigma^0_1 \arrow[dr, dash] & & 2\text{-}\Sigma^0_1 \arrow[dr, dash] & & & \alpha\text{-}\Sigma^0_1 \arrow[dr, dash] & & \\
 & 2\text{-}\Delta^0_1 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \cdots\cdots & \alpha\text{-}\Delta^0_1 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \cdots\cdots & = \Delta^0_2 \\
\Pi^0_1 \arrow[ur, dash] & & 2\text{-}\Pi^0_1 \arrow[ur, dash] & & & \alpha\text{-}\Pi^0_1 \arrow[ur, dash] & &
\end{tikzcd}
$$

- **超限回心変わりによる極限計算可能性の階層**
- $\boldsymbol{\Delta^0_2}$ = **極限計算可能** $= \bigcup_{\alpha<\omega_1^{CK}} \alpha\text{-}\boldsymbol{\Sigma}^0_1$.

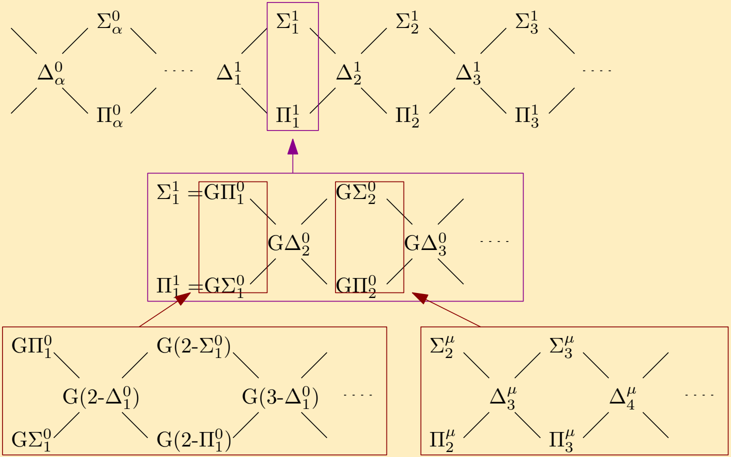
Δ^1_2 の内部には大量の階層が……



- **ゲーム量化子: 無限長の量化子の入れ子の真偽は ∃-プレイヤーが必勝戦略が持つかで決まる.**
- **$\Game\Gamma$: Γ 論理式 φ に対する以下のゲームによって定義可能**

$$\forall x_0 \exists y_1 \ldots \forall x_n \exists y_n \ldots \varphi(i, \overline{x}, \overline{y})$$

Δ^1_2 の内部には大量の階層が……



ボレル階層 (Hausdorff, Lebesgue, and others; 1900–10s)

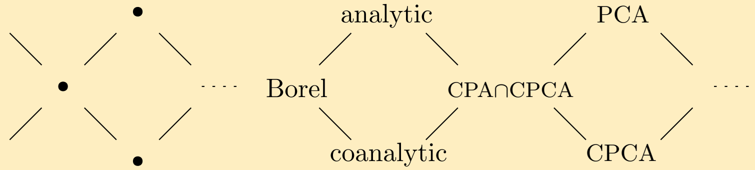
$$
\begin{tikzcd}
 & \text{open} \arrow[dr, dash] & & F_\sigma \arrow[dr, dash] & & G_{\delta\sigma} \arrow[dr, dash] & \\
\text{clopen} \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & F_\sigma \cap G_\delta \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & F_{\sigma\delta} \cap G_{\delta\sigma} \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \cdots\cdots \\
 & \text{closed} \arrow[ur, dash] & & G_\delta \arrow[ur, dash] & & F_{\sigma\delta} \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}
$$

- **ボレル集合は，開または閉集合を始点として何回の可算和・可算共通部分を用いて構成できるかによって分類できる．**
- **Γ_σ: Γ 集合の可算和として書ける集合**
- **Γ_δ: Γ 集合の可算共通部分として書ける集合**

豆知識

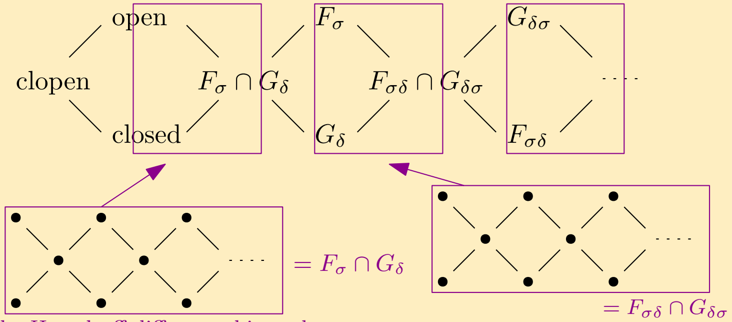
- **G_δ-空間でない空間だと，F (open) の階層と G (closed) の階層が分離する**
- **距離化可能空間やコンパクト T_1 空間は G_δ-空間である．**
- **G_δ-空間以外でボレル階層を定義する方法もあり，擬ポーランド空間の記述集合論において深く研究されている** (cf. de Brecht 2014)

射影階層 (Luzin, Sierpinski, and others; 1920s)



- CΓ: Γ 集合の補集合として書ける集合
- PΓ: Γ 集合の射影として書ける集合
- 記述集合論の主戦場で，ZFC 独立命題の温床
- Luzin (1920s): “One does not know, and one will never know.”

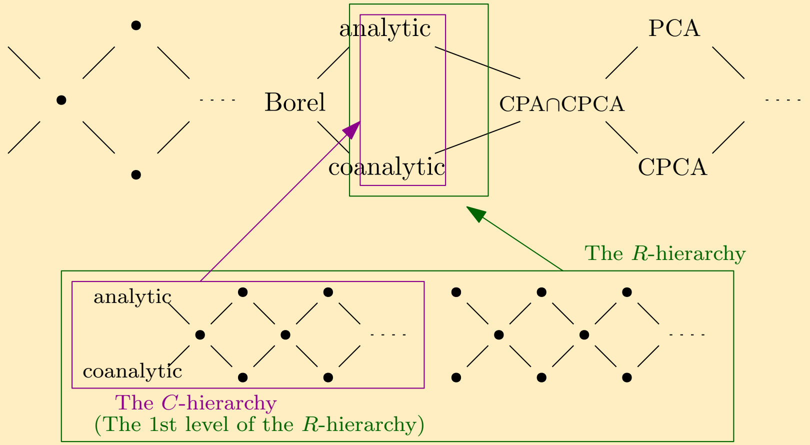
差の階層 (Hausdorff 1914 for $F_\sigma \cap G_\delta$; Kuratowski for general)



The Hausdorff difference hierarchy

- **Γ を基とする差の階層の第 n 階: Γ 集合列 (A_i) を用いて $A_1 \setminus (A_2 \setminus (\dots(A_{n-1} \setminus A_n)\dots))$ と書ける集合**
- **$F_\sigma \cap G_\delta$ は開集合を基とする長さ ω_1 の差の階層から形成される.**
- **$F_{\sigma\delta} \cap G_{\delta\sigma}$ は F_σ 集合を基とする長さ ω_1 の差の階層から形成される**

CPA ∩ CPCA の内部には大量の階層が……; (1920s)



- 計算可能性理論と記述集合論には沢山の階層が存在する
- どちらの階層も問題の複雑性を測るのに用いられる

計算可能性理論における例

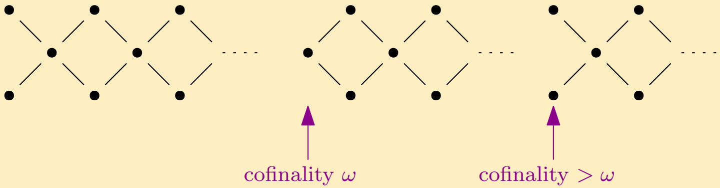
- 停止問題，群の語の問題，ディオファントス方程式の可解性判定 etc. は Σ^0_1 完全
- 有限表示群が torsion-free であるかどうかの判定は Π^0_2 完全
- 計算可能全順序が $\mathbb{Q}$ を含むかどうかの判定は Π^1_1 完全

記述集合論における例

- 常微分方程式の初期値問題の解が一意かどうかの判定は $C(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2$ で G_δ 完全
- 連続体の局所連結性判定は，連続体の超空間で $F_{\sigma\delta}$ 完全
- 連続体の単連結性判定は，2 次元では coanalytic 完全，4 次元以上では CPCA 完全

全ての (!) 記述集合論的階層は Wadge 階層によって精密化される．

Wadge 次数構造 (1970s)



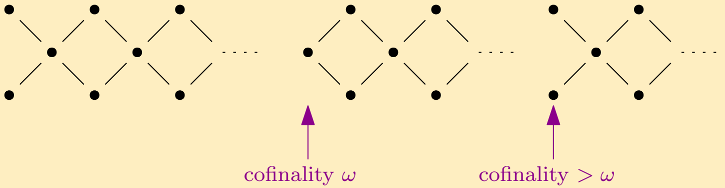
- Wadge 次数……位相空間の部分集合の複雑性を測る指標．
  位相空間 X の部分集合 $A, B \subseteq X$ に対して，

$$A \leq_W B \iff (\exists f : X \to X \text{ 連続})\ A = f^{-1}[B].$$

- (AD) ω^ω の全ての部分集合は $\leq_W$ によって半整列する．
  （つまり，ω^ω の全ての部分集合は上図のように綺麗に並ぶ）

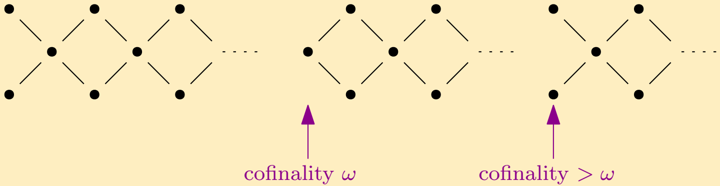
※最近は無限オートマトンの研究などでも Wadge 次数は使われている

Wadge 階層 (1970s)



- **rank**(clopen) $= 1$; **rank**(open) $=$ **rank**(closed) $= 2$
- **rank** $\approx 2\alpha$ ($\alpha < \omega_1$): the α^{th} level of the difference hierarchy.
- **rank**(F_σ) $=$ **rank**(G_δ) $= \omega_1$.
- **rank** $= \omega_1^2$: the difference of two G_δ sets or the diff. of two F_σ sets
- **rank** $= \omega_1^\alpha$: the α^{th} level of the diff. hierarchy over F_σ
- **rank**($F_{\sigma\delta}$) $=$ **rank**($G_{\delta\sigma}$) $= \omega_1^{\omega_1}$.
- **rank** $= \omega_1^{\omega_1^\alpha}$: the α^{th} level of the diff. hierarchy over F_σ

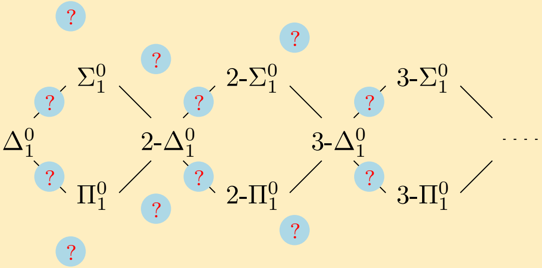
Wadge 階層 (1970s)



- Rank $\omega_1 \uparrow\uparrow n$ (the n^{th} level of the superexp hierarchy): the n-th level of the Borel hierarchy.
- Rank $\varepsilon_{\omega_1}[\omega_1]$: the ω_1^{th} fixed point of the exp. of base ω_1: the ω-th level of the Borel hirarchy.
- The Veblen hierarchy of base ω_1: $\phi_\alpha(\gamma)$: the γ^{th} ordinal closed under $+$, $\sup_{n\in\omega}$, and $(\phi_\beta)_{\beta<\alpha}$.
- Rank $\phi_\alpha(1)$ ($0 < \alpha < \omega_1$): The ω^α-th rank of the Borel hierarchy.
- $\mathrm{rank}(\text{analytic}) = \mathrm{rank}(\text{coanalytic}) = \sup_{\xi<\omega_1} \phi_\xi(1)$.

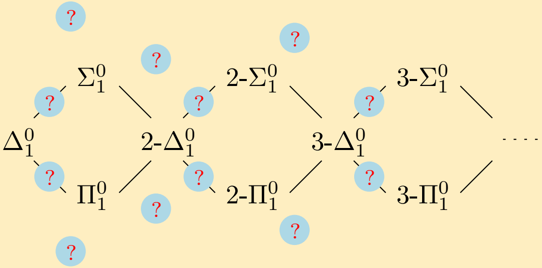
- 記述集合論における階層を統合する究極的な階層 (Wadge 階層) が存在し，ω^ω の部分集合の構造は美しく整然とする．
- 計算可能性理論における階層を統合する究極の階層は？

計算可能性理論の階層構造



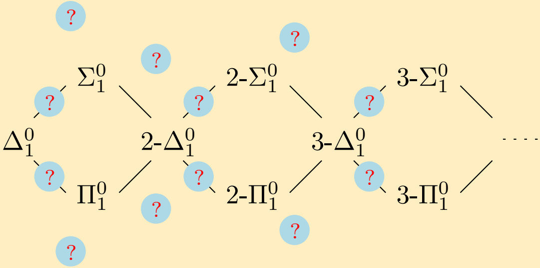
- Selivanov の微細階層の理論 (1983): 超算術的集合に対する，一部だけ完璧（上図参照）な究極な階層が存在する．
- 一方で，他の至る所 (?部分) に秩序は存在しない．

計算可能性理論の階層構造



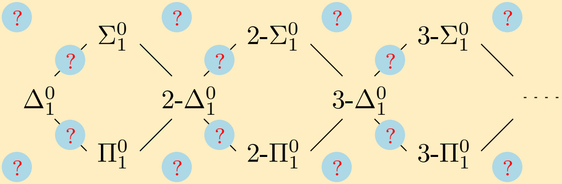
- Post の問題 (1944): **停止問題よりは簡単だが，計算不可能である Σ_1 問題は存在するか？**
  (**Σ^0_1 と Δ^0_1 の中間の?部分の難易度の決定問題は存在するか？**)
- Friedberg-Muchnik (1957): Yes. **中間難度の Σ_1 決定問題が存在．**
  - **実際，各 ? 部分は，任意の可算半順序が埋め込めるくらい巨大．**
  - **決定問題の $\leq_T$ も $\leq_m$ も，その順序構造の一階理論は $\mathbb{N}$ の二階理論と同じ複雑性を持つ．**

計算可能性理論の階層構造



- Post の問題 (1944): **停止問題よりは簡単だが，計算不可能である Σ_1 問題は存在するか？**
  (Σ^0_1 と Δ^0_1 の中間の ? 部分の難易度の決定問題は存在するか？)
- Friedberg-Muchnik (1957): Yes. **中間難度の Σ_1 決定問題が存在．**
- ……**が，それらは極めて技巧的で人工的な Σ_1 問題である**
- Post **の問題の「自然」な解は存在するか？**
  (**Σ_1-完全でも Δ_1 でもない自然な Σ_1 問題は存在するか？**)
- **「自然」とは何か？　「自然」の数学的定義とは？**

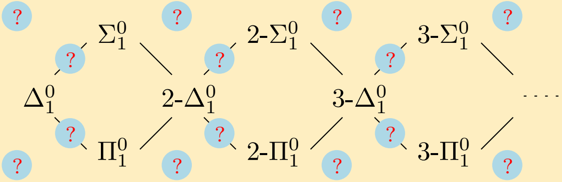
計算可能性理論の階層構造



Big Conjecture: ? contains no natural problems

- (60 年代) 自然な決定問題 P は，相対化可能であり，同じ強さの神託 X, Y に対する相対化 P^X と P^Y の難易度が等しい．
- (マーティン予想; Victoria Delfino 第 5 懸賞問題) (ZF+AD+DC) 自然な決定問題のチューリング次数は整列し，後続はチューリングジャンプによって与えられる．
- V.D. 第 1〜5 問題 (Cabal '76–77) の中では最後の未解決問題．
- 計算可能性理論の最大の未解決問題の 1 つ
- 第 6〜12 問題 (Cabal '81–85) と第 13〜14 問題 (90s) も含めると，第 5 (Martin) と第 14 問題 (Woodin; $\mathbf{AD} \overset{?}{=} \mathbf{AD}^+$) のみが未解決．

計算可能性理論の階層構造



Theorem: ? contains no very natural problems!

Theorem (K. and Montalbán, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.)

(**AD**) **「とても自然」な決定問題の多対一次数は** Wadge **次数に完全に一致する．**

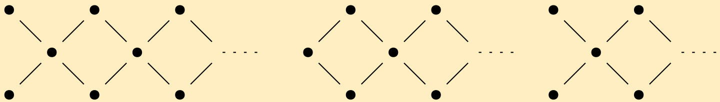
「とても自然」な決定問題 P **は，相対化可能であり，**
同じ強さの神託 X, Y **に対する相対化** P^X **と** P^Y **の難易度が等しい**:

$$X \equiv_T Y \implies P^X \equiv_m P^Y.$$

更に， $X \equiv_T Y$ **の** witness **から** $P^X \equiv_m P^Y$ **の** witness **を返す関数が存在.**

「とても自然」な決定問題の多対一次数は Wadge 次数に完全に一致

とても自然な決定問題の多対一次数構造



「とても自然」な決定問題 P は，相対化可能であり，次が成り立つ:

$$X \equiv_T Y \implies P^X \equiv_m P^Y.$$

更に，$X \equiv_T Y$ の witness から $P^X \equiv_m P^Y$ の witness を返す関数が存在.

- Wadge 次数……位相空間の部分集合の複雑性を測る指標
- 「とても自然」な決定問題について，

  「計算論的な難易度」＝「位相的複雑性」
- 「開」と「開かつ閉」の中間は存在しないので,「Σ_1-完全」と「計算可能」の中間難度の「とても自然」な決定問題は存在しない.
- この「中間難度の非存在」が全てのレベルで成立する.

Theorem (K. and Montalbán, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.)

($\mathbf{AD}^+$) Q を better-quasi-order (BQO) とする．このとき，

「とても自然」な Q 値問題の多対一次数は，
Q 値関数の Wadge 次数に完全に一致する．

- (Kruskal 他) WQO (well-quasi-order) の理論
- (Nash-Williams 1965) BQO (better-quasi-order) の導入
- (Block 2015) vsBQO (very strong better-quasi-order):
$$(\forall f : [\omega]^\omega \to Q)(\exists X \in [\omega]^\omega)\ f(X) \leq_Q f(X^-).$$
where X^- is the shift of X, that is, $X^- = X \setminus \{\min X\}$.
- WO $\Longrightarrow$ vsBQO $\Longrightarrow$ BQO $\Longrightarrow$ WQO.
- 任意の有限前順序は BQO.
- (Woodin) $\mathbf{AD}^+ \vdash$ Axiom of Ramsey:
$(\forall A \subseteq [\omega]^\omega)(\exists X \in [\omega]^\omega)\ ([X]^\omega \subseteq A \text{ or } [X]^\omega \cap A = \emptyset)$.
- (K. & Montalbán) Axiom of Ramsey の下で BQO = vsBQO.
(AR より，f は Ellentuck 位相の下でベールの性質を持つので)

Theorem (K. and Montalbán, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.)

($\mathbf{AD}^+$) Q を better-quasi-order (BQO) とする．このとき，

「とても自然」な Q 値問題の多対一次数は，
Q 値関数の Wadge 次数に完全に一致する．

BQO は，ボレル関数の Wadge 次数構造の理解に極めて重要（後述）

- 関数 $f, g : \omega^\omega \to Q$ について，

$$f \leq_W g \iff (\exists \theta \text{ 連続})(\forall x \in \omega^\omega)\ f(x) \leq_Q g \circ \theta(x).$$

- van Engelen-Miller-Steel (1987):
  Q が BQO $\Longrightarrow$ Q-値ボレル関数の Wadge 次数も BQO.
- Block (2015): AD を仮定する．
  Q が vsBQO $\Longrightarrow$ Q-値関数の Wadge 次数も vsBQO.

- Q-ラベル付き木とは，木 $(T, \preceq_T)$ とラベル $\nu_T : T \to Q$ の対
- Q-ラベル付き木 S, T の間の準同型とは，関数 $h : S \to T$ で，

$$\sigma \preceq_S \tau \implies h(\sigma) \preceq_T h(\tau).$$
$$\nu_S(\sigma) \leq_Q \nu_T(h(\sigma)).$$

- $S \trianglelefteq T \iff$ 準同型 $h : S \to T$ が存在する．
- $\mathsf{Tree}(Q)$: Q-ラベル付き可算整礎木全体
- $^{\sqcup}\mathsf{Tree}(Q)$: $\mathsf{Tree}(Q)$ の可算和として書ける森全体
- $\mathsf{B}_\alpha(Q)$: Q-値ベール α 級関数全体

定理 (Selivanov 2004; 2017)

Q を有限離散順序とする．

$$(\mathsf{B}_1(Q), \leq_W) \simeq (^{\sqcup}\mathsf{Tree}(Q), \trianglelefteq)$$
$$(\mathsf{B}_2(Q), \leq_W) \simeq (^{\sqcup}\mathsf{Tree}(\mathsf{Tree}(Q)), \trianglelefteq)$$

Selivanov (2016) では，これの任意のベール有限級への一般化が証明なしでアナウンスされている．しかし，Selivanov (2017) では曖昧な記述になっており，本当に証明されているのか不明.

Theorem (K. and Montalbán)

Q を BQO とする．

$$(\mathrm{B}_1(Q), \leq_w) \simeq ({}^{\sqcup}\mathrm{Tree}(Q), \trianglelefteq)$$
$$(\mathrm{B}_2(Q), \leq_w) \simeq ({}^{\sqcup}\mathrm{Tree}(\mathrm{Tree}(Q)), \trianglelefteq)$$
$$(\mathrm{B}_3(Q), \leq_w) \simeq ({}^{\sqcup}\mathrm{Tree}(\mathrm{Tree}(\mathrm{Tree}(Q))), \trianglelefteq)$$
$$(\mathrm{B}_4(Q), \leq_w) \simeq ({}^{\sqcup}\mathrm{Tree}(\mathrm{Tree}(\mathrm{Tree}(\mathrm{Tree}(Q)))), \trianglelefteq)$$
$$\cdots$$

実際，任意の可算順序数 α について，以下が成立する．

$$(\mathrm{B}_\alpha(Q), \leq_w) \simeq ({}^{\sqcup}\mathrm{Tree}^\alpha(Q), \trianglelefteq)$$

特に，以下が成立する．

$$(\mathbf{Borel}(Q), \leq_w) \simeq (\bigcup_{\alpha<\omega_1} {}^{\sqcup}\mathrm{Tree}^\alpha(Q), \trianglelefteq)$$

証明には，計算可能性理論におけるチューリング次数の理論に関する Friedberg’s jump inversion theorem を用いる．

- なぜ BQO が重要だったか？
- (EMS 87) Q が BQO $\Longrightarrow$ $(\mathbf{Borel}(Q), \leq_W)$ も BQO.
- よって，帰納的に $\mathrm{Tree}^{\alpha}(Q)$ が BQO となることも示せる．
- これより，たとえば以下のことが分かる．

$$B_n(Q) \simeq B_{n-1}(\mathrm{Tree}(Q)) \simeq B_{n-2}(\mathrm{Tree}^2(Q)) \simeq \ldots$$
$$\simeq B_{n-k}(\mathrm{Tree}^k(Q)) \simeq \cdots \simeq B_1(\mathrm{Tree}^{n-1}(Q)) \simeq {}^{\sqcup}\mathrm{Tree}^n(Q).$$

- この観測は証明を大幅に簡略化する．

- $Q = 2$ の場合，$(B_\alpha(2), \leq_W)$ の構造は，Wadge, Duparc らによって調べられている．
- Duparc の論文は 2000 年頃に公表されたが，人類には理解不可能な証明が書かれており，いまだ受理されていない．
- ということで，$Q = 2$ のときですら，常人に理解可能な論文が存在しなかった．
- 我々の証明は，$Q = 2$ に制限しても，既知の証明 (?) の大幅な簡易化を与えており，本結果の副産物として，$Q = 2$ の場合の「頑張れば理解できる証明」が与えられる．

Corollary (K. and Montalbán)

Q を BQO とし，VN を「とても自然」な問題全体とする．

$$(\Delta^0_2(Q) \cap \mathrm{VN}, \leq_m) \simeq ({}^{\sqcup}\mathrm{Tree}(Q), \trianglelefteq)$$
$$(\Delta^0_3(Q) \cap \mathrm{VN}, \leq_m) \simeq ({}^{\sqcup}\mathrm{Tree}(\mathrm{Tree}(Q)), \trianglelefteq)$$
$$(\Delta^0_4(Q) \cap \mathrm{VN}, \leq_m) \simeq ({}^{\sqcup}\mathrm{Tree}(\mathrm{Tree}(\mathrm{Tree}(Q))), \trianglelefteq)$$
$$(\Delta^0_5(Q) \cap \mathrm{VN}, \leq_m) \simeq ({}^{\sqcup}\mathrm{Tree}(\mathrm{Tree}(\mathrm{Tree}(\mathrm{Tree}(Q)))), \trianglelefteq)$$
$$\cdots$$

実際，任意の可算順序数 α について，以下が成立する．

$$(\Delta^0_{1+\alpha}(Q) \cap \mathrm{VN}, \leq_m) \simeq ({}^{\sqcup}\mathrm{Tree}^{\alpha}(Q), \trianglelefteq)$$

特に，以下が成立する．

$$(\Delta^1_1(Q) \cap \mathrm{VN}, \leq_m) \simeq (\bigcup_{\alpha<\omega_1} {}^{\sqcup}\mathrm{Tree}^{\alpha}(Q), \trianglelefteq)$$

- T. Kihara and A. Montalbán, The uniform Martin's conjecture for many-one degrees, to appear in Transactions of the American Mathematical Society (arXiv:1608.05065).
- T. Kihara and A. Montalbán, On the structure of the Wadge degrees of BQO-valued Borel functions, submitted (arXiv:1705.07802).